Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Théme : Suites réelles

Représentation graphique d'une suite

Exercice :

On represente ci-contre la courbe (C_f) d'une fonction f et la droite $D: y = x$.

1°) Utiliser le graphique ci-dessous pour justifier la proposition suivante :

$f(x) \geq x$ pour $x \in [1,7]$.

2°) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$.

Donner u_1, u_2, u_3 et u_4. Que peut-on dire da la suite (u_n) ?

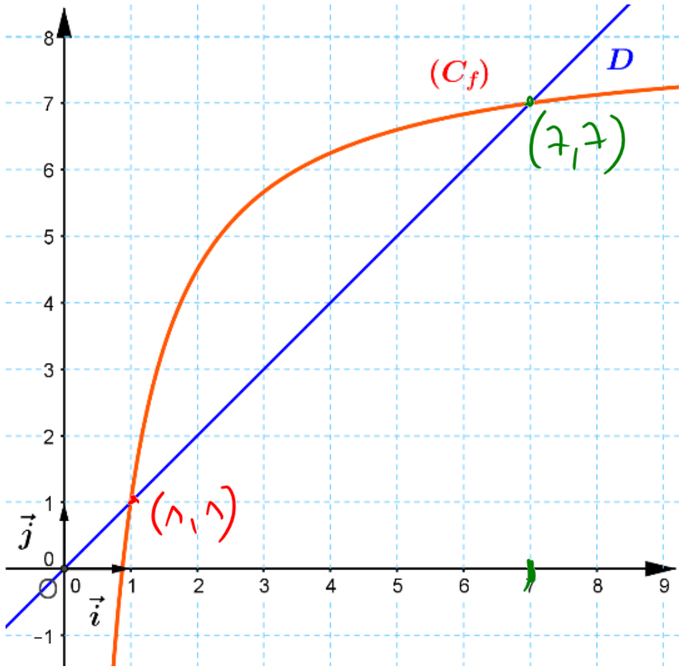
3°) Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = f(v_n), \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$.

a) Placer sur l'axe des abscisses les points v_1, v_2 et v_3.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$ on a : $1 \leq v_n \leq 7$.

c) Montrer que (v_n) est croissante.

d) En déduire que (v_n) est convergente et calculer sa limite.



1°) Pour $x \in [1,7]$ la courbe C_f est au dessus ou sur la droite $D: y = x$

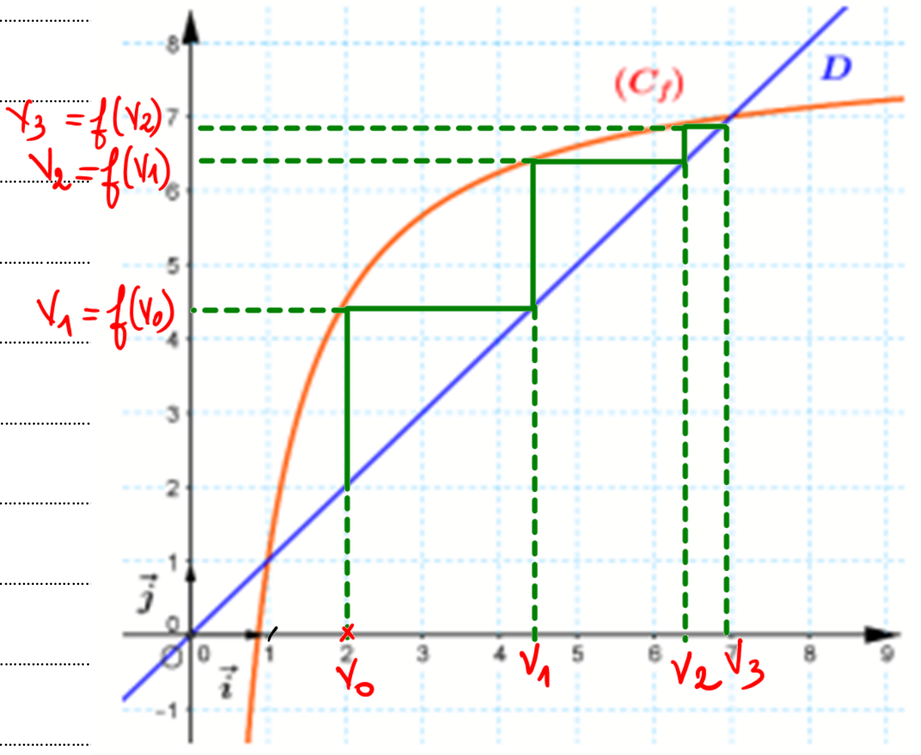
Donc $\forall x \in [1,7]$; $f(x) \geq x$

2°) $u_0 = 1$; $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

- $u_1 = f(u_0) = f(1) = 1$
- $u_2 = f(u_1) = f(1) = 1$
- $u_3 = f(u_2) = f(1) = 1$
- $u_4 = f(u_3) = f(1) = 1$

$\Rightarrow$ la suite (u_n) est constante.

3) a)



b) pour $n=0$ $\quad 1 \leqslant V_0 = 2 \leqslant 7$ (Vrai)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 \leqslant V_n \leqslant 7$ et

montrons que $1 \leqslant V_{n+1} \leqslant 7$.

On a $\quad 1 \leqslant V_n \leqslant 7$

or f est croissante sur $[1,7]$

Donc $f(1) \leqslant f(V_n) \leqslant f(7)$

$\Rightarrow 1 \leqslant V_{n+1} \leqslant 7$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leqslant V_n \leqslant 7}$

c) $\forall x \in [1,7]$; $f(x) \geqslant x$

or $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n \in [1,7]$

Donc $f(V_n) \geqslant V_n \Rightarrow V_{n+1} \geqslant V_n$

Ainsi la suite (V_n) est croissante

d) (V_n) est croissante et majorée par 7, donc elle est convergente.

On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l$ avec $1 \leqslant l \leqslant 7$

et $V_{n+1} = f(V_n)$ avec f est continue sur $[1,7]$, en particulier en l donc

$f(l) = l$.

Ainsi $l = 1$ ou $l = 7$

et comme (V_n) est croissante donc

$l = 7$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 7$